ZAGADNIENIA GEOMETRYCZNE.

Cena Złr. 1 m. k.

DIE QUADRATUR DES KREISES

wie auch

andere gelöste geometrische Probleme.

QUADRATURE DU CERCLE

et

autres problêmes géométriques resolus.

KWADRATURA KOŁA

tudzież

inne zagadnienia geometryczne rozwiązane

przez

Stanisława Służewskiego.

KRAKÓW
w Drukarni c. k. Uniwersytetu.
1853.

KWADRATURA KOŁA

tudzież

inne zagadnienia geometryczne rozwiązane

przez

Stanisława Służewskiego.

Przedsłowie.

Jeżeli w geometrji elementarnéj znajdowały się jeszcze zagadnienia ktorych dotąd rozwiązać nie umiano, to wcale nie dla tego, żeby one były przez się nierozwiązalne albolitéż żeby geometrja podołać im nie mogła. Lecz pochodziło to raczéj z braku wykreślenia, czyli rozkładu ich istoty, że tak powiemy naturalnego, koniecznie potrzebnego dla ścisłéj geometrycznéj demonstracji. Jedném słowem było to wadą analizy i syntezy, które się powinny zawsze zasadzać na naturze przedmiotu, a które zastępowano przez analizę i syntezę konwencjonalną, *to jest taką mianowicie, jakiéj dostarczały dania zebrane w pewnym* systemacie *téj umiejętności. I możemy powiedzieć, było to skutkiem znajomości nabytych w pewnym systemacie umiejętności, ponieważ tutaj przedmiotem badania jest abstrakcja; bywa zaś skutkiem naszego interesu, lub tego raczéj co nim być mniemamy, albo naszych widoków, tego właściwie co dzisiejsza filozofia w teoryi nazywa* ja: *jeżeli przedmiot zadania jest religijny, moralny, a szczególniéj polityczny. Ztąd to sofizma w mowie, lub piśmie które udowodnienie rzeczywistości i prawdy na celu mieć powinny; ztąd téż niemożliwość*

dla geometry najbieglejszego nawet, który wszakże więcéj oblicza niż rozumuje. Co zaś do kwadratury koła w szczególności: Mniemanie a raczéj przesąd, że zagadnienie to jest nierozwiązalne, nie zasadza się zgoła na rozumowaniu, któreby się ze ścisłą demonstracją geometryczną porównać dało; chyba żeby ktoś zechciał w téj mierze przywiązywać wagę do francuzkiego przysłowia: Ce qui est rond n'est pas quarré. *Na to wszakże odpowiemy: Dwie objętości, jedna walca, druga sześcianu* równoważne, *mając tęż samą wysokość, muszą mieć koniecznie podstawy równe. Zatém istnieje w abstrakcyi kwadrat równy powierzchnią z kołem. Znajdując zaś to co istnieje niezawodnie, i ściśle (geometrycznie) dowodząc żeśmy je znaleźli, nie troszczymy się o zdanie przeciwne w téj mierze, jakiegoś tam* uczonego, *albo choćby i zgromadzenia poczytującego się za najuczeńsze. Że zaś nam dobrze wiadomo, jak jest potężny przesąd aż póki powalonym nie zostanie; przeto oświadczamy, że gotowi jesteśmy odpowiedzieć kategorycznie na wszelki zarzut wzniecony przezeń w téj materyi, byleby jednak zarzut ten był wyrozumowany na zasadzie dania geometrycznego, nie zaś oparty na jednéj z tych fikcji, którym powszechne uznanie, tak w kwestyi matematycznéj, jak w każdéj innéj, wartości pewnika nadać nie może.*

Kwadratura koła.

Zadanie.

Znaleść kwadrat równy powiérzchni koła którego promień jest dany.

Rozwiązanie.

I. Niech będzie koło (fig. 1.) którego promień AC prostopadły do średnicy A'B', tudzież AF$=$AC, styczna połowy kąta prostego w środku C, którego CF sieczną i przekątną $\overline{AC}^2$.

1) Jeżeli podzieliwszy AF na $Ah=hF=\frac{AC}{2}$ i połączywszy punkta h i C przez punkt B, w którym sieczna Ch przecina okrąg koła danego, poprowadzimy ak sieczną równoległą od A'B', przecinającą AC w punkcie d, zaś CF i CF' w punktach a i k: trójkąty podobne ACF i aCd dają: ad$=$Cd; trójkąty ACh i dCB dają $Bd=\frac{Cd}{2}=aB$. Ponieważ znowu Cd jest dostawą kąta ACB a Ch jego sieczną i zarazem przeciwprostokątną w trójkącie Ach, przeto wziąwszy Ac$=$1 mamy $Ch=\frac{\sqrt{5}}{2}$; dostawa $Cd=\frac{2}{\sqrt{5}}$; i $\overline{ad}^2=\overline{Cd}^2=\frac{4}{5}$.

ACF z wykreślenia jest połową kąta prostego FCF', ACF wycinkiem równym $\frac{1}{8}$ powiérzchni koła danego, rozdzielonym

przez promień CB na wycinki $ACB > BCD$; Bd jest wstawą łuku $AB = \frac{BE}{2}$; skąd i z podobieństwa trójkątów FCF′ i aCk:

$$ak = 2ad = 2Cd; \quad \overline{ak}^2 = (\overline{2ad})^2 = (\overline{2Cd})^2 = \tfrac{16}{5}.$$

2) W rozprawie obszerniejszéj, któréj ogłoszenie drukiem w obecnéj chwili nie od nas samych zależy, dowodzimy ściśle, bez wprowadzenia ilości liczebnéj na Ch, że $\overline{ak}^2$ jest większy od powiérzchni koła promienia AC. Tutaj zaś, możemy śmiało poprzestać na twierdzeniu Archimedesa: że powierzchnia ta mniejsza jest niż $3 + \frac{1}{7}$, tém bardziéj więc niż $3 + \frac{1}{5}$ (przyp. 1.).

A w takim razie, a′k′ bok kwadratu równego powiérzchni koła promienia AC, z niém współśrodkowego, równoległy od średnicy A′B′, mający swe punkta ostateczne na CF i CF′ (ob. 1) przetnie jego okrąg tak, że promień do tego punktu przecięcia poprowadzony rozdzieli wycinek ACD na *dwa inne* z których jeden będzie większy od ACB drugi mniejszy od BCD; czyli, naznaczywszy dla skrócenia literą ψ kąt wycinka którym się ACB zwiększy, kąt który będzie miał $Ch' > Ch$ za sieczną, a za dostawę równą połowie boku kwadratu szukanego, $Cd' < Cd$, będzie równy ilości wykreślnéj $ACB + \psi$ (przyp. 2.).

II. W punkcie h, gdzie sieczna Ch odcina na AF, styczną Ah, robimy kąt $Chl = ACB$, prowadząc hl równoległą od AC, zatém prostopadłą do AF.

Przypuściwszy, żeśmy w punkcie C znaleźli kąt ilości 2ψ mający za jedno ramie Ch i wyobraziwszy literą x punkt przecięcia się drugiego ramienia jego z AF, mamy kąt wyobrażony $hCx = 2\psi$ i Cx sieczną kąta $ACB + 2\psi$ tak,
Iż, jeżeli potrafimy oznaczyć naprzód wykreślnie położenie punktu y, także wyobrażonego, w którym Cx przeciąć musi hl, a to za pomocą linii trzeciéj yV, przecinającéj się z hl i Cx, w jednym i tymże samym punkcie y, wynalezionéj w taki sposób: że położenie dwóch punktów na niéj wziętych, względem koła danego i siecznéj Ch, oznaczone zostanie ścisłą demonstracyą geometryczną: uczynimy zadość rozwiązaniu zada-

nia w mowie będącego; gdyż, przez ten punkt przecięcia się hl z linią yV, położenia i kierunku geometrycznie jako *conditio sine qua non* też oznaczonych, i punkt C prowadząc linią: ta co do kierunku, będzie taż sama co Cx drugie ramie kąta $hCx = 2\psi$. Mając zaś kąt 2ψ, tém samém będziemy mieli $ACB + \psi$ (ob. I 2).

III. Wyobraziwszy literą z, punkt przecięcia się aB i Cx, mamy trójkąt BCz też wyobrażony; a w przypuszczeniu że położenie punktu y na linii hl już nam znane, wyobraźmy jeszcze yx' równoległą od AF tudzież punkt z' w przecięciu yx' z Ch i punkt x' w przecięciu yx' z AC (zatém $yx' = \frac{AC}{2}$ ob. I, II); skąd powstaje trójkąt yCz' podobny trójkątowi BCz; pomiędzy niemi zaś, jako różnica ich powiérzchni, trapez ukośny Bzyz'.

IV. Wyobraźmy nakoniec yB, przekątną trapeza Bzyz', (zatém przecinającą się w jednym i tymże samym punkcie z hl i Cx ob. II, III) przedłużoną od punktu B, aż do spotkania znowu okręgu koła danego, w punkcie V, rozdzielającą kąt $EBC = aBh$ (ten sam co zBz' w trapezie Bzyz') na dwa inne: CBV przyległy CB, który dla skrócenia oznaczmy literą n, i EBV przyległy EB, który oznaczamy literą m.

V. Na linii EB zróbmy przedłużenia $EM = BN = EB$; przedłużywszy CB i CE tak że $BO = EG$ są średnicami, jeżeli połączymy punkta E i O tudzież B i G, EO i BG są prostopadłe do NM; łącząc znowu punkta M i O, jak równie N i G, mamy kąty $BMO = ENG = aBh$; złączywszy nakoniec punkta D i D', mamy DD' bok kwadratu wpisanego w koło dane, równoległy od NM (ob. I, 1), przecinający AC w punkcie f, który przedłużywszy, w przypuszczeniu że nam kąt m (ob. IV) już znany, wykréślamy kąty $BMH = ENT = m$, których ramiona MH i NT przecinają DD' przedłużone w punktach e' i e''.

Jeżeli znowu przez punkta B i E, poprowadzimy równoległe od NT i MH, piérwsza z nich przecinając DD' w punkcie x'', dopełni równoległoboku BNe''x'', zatém $e''x'' = BN = EB$; druga przecinając tenże DD' w punkcie x''', dopełni równo-

ległoboku EMe'x''', zatém $e'x'''=EM=EB$; skąd $e''x''=e'x'''$ i $e''x''+e'x'''=2BE$.

Ale trójkąt e'Px''' równoramienny, daje

$e'p=px'''=\frac{EB}{2}$. W prostokącie zaś dfpE, $pf=\frac{EB}{2}$, zatém

$px'''=pf=p'x''=\frac{EB}{2}$, to jest punkta x''' i x'' o tyle są odległe od punktów p i p', o ile te ostatnie oddalone są od punktu f; a że wszystkie są na téjże saméj linii DD' i

$pf=p'f=\frac{BE}{2}$; nadto $pf+p'f=px'''+p'x''$ tudzież

$px'''+p'x''=e''x''=e'x'''$, jak równie $e''x''+ex'''=e'e''=EB$, przeto punkta x''' i x'' są identyczne z punktem f i ze sobą. Inaczéj, punkt f, jest wspólném przecięciem się równoległych od NT i MH, przez punkta B i E prowadzonych, tudzież DD' boku kwadratu wpisanego w koło dane prostopadłego do AC, i z AC promieniem prostopadłym do EB (ob. I 1).

Odwrotnie więc, jeżeli przez punkta dane B i E, tudzież punkt f, w którym DD' przecina AC, poprowadzimy BV i EQ mamy kąt $EBV=BEQ=m$ i kąty $OBV=GEQ=n$ (ob. IV) (3).

A nadto (ob. II) położenie punktów B i f znajdujących się na linii BV, wspólném ramieniu kątów m i n, na któréj téż znajduje się i punkt y, wspólne przecięcie się yV, hl i Cx (Ob. II. III. IV.), jest oznaczone najściślejszą demonstracyą geometryczną, bo wypada z analizy, w któréj żadne *falsum suppositum* miejsca niema.

VI. Po wykreśleniu więc pod I 1 zrobioném, prowadząc hl (ob. II), i połączywszy punkta D i D', przez punkta B i f prowadząc eV (ob. V) mamy punkt e rzeczywisty, ten sam co y przypuszczony (ob. II IV). Przez punkta zaś C i e (ob. II) prowadząc Ch'', mamy kąt hCh'', ten sam co $hCx=2\varphi$: który dzieląc na dwie równe części, i przez punkt o, (gdzie sieczna Ch' dzieli łuk miarą jego będący, podobnież na dwie równe części), prowadząc a'k' równoległą od A'B', mamy $a'k'=2Cd'$ (ob. I 1. 2.), bok kwadratu równego powierzchni koła promienia AC.

Wniosek. Ch' *sieczna kąta* ACB+ψ *jest promieniem koła równego powierzchnią z kwadratem opisanym na kole promienia* AC, *którego* FF'=A'B'=2AC *jest bokiem.*

Albowiem nakreśliwszy okrąg promieniem Ch' (fig. 1) FF' równoległa od A'B' jest także i od średnicy A''B''=2Ch' do któréj promień CR=Ch' prostopadły i FF' ma swe punkta ostateczne (ob. I, 2.) na ramionach kąta prostego C, w środku koła promienia Ch', tudzież przecina się z okręgiem jego właśnie tam, gdzie Ch' rozdziela wycinek RCD'' równy $\frac{1}{8}$ jego powierzchni, na dwa takie: z których RCh' jest podobny wycinkowi ACo=ACB+ψ.

Żeby więc znaleść promień koła równego w powierzchni z kwadratem danym, potrzeba w kwadrat ten wpisać koło i sposobem opisanym pod I, II, V i VI rozdzielić wycinek równy $\frac{1}{8}$ powierzchni tego koka na dwa takie: z których jeden będzie podobny ACB+ψ wycinkowi, a sieczna łuku, tego wycinka, będzie promieniem szukanym.

Przydatek. Ponieważ kwadrat z promienia równa się powierzchnią z prostokątem wystawionym na siecznéj i dostawie tegoż samego łuku; wziąwszy więc a'k' za promień a AC za dostawę, otrzymamy łuk, którego sieczna będzie połową okręgu koła promienia AC.

Nadto, zamienić (geometrycznie) koło dane na kwadrat równy z niém w powierzchni, i odwrotnie, jest to głównie rozwiązać zagadnienie kwadratury koła. Obliczyć π, stanowi zadanie podporządkowane, tak że mu jedno zadość uczynić może formuła, będąca bezpośredniém następstwem rozwiązania geometrycznego. Filozofowie greccy, ci ojcowie geometrji elementarnéj, tak przynajmniéj pojmowali (Anaxagoras) to zagadnienie aż do Archimedesa. A lubo temu starożytnemu mistrzowi w ścisłych umiejętnościach nie przeszło przez myśl, żeby wielobok foremny, a do tego o nieskończonéj liczbie boków (???), mógł się kiedyś stać identycznym z kołem; że jednak odkrył, iż obwód wielokąta opisanego o 96 bokach, tak już bliski okręgu koła weń wpisanego, że może być prawie wzięty za *maximum* π, to dało powod, że wziąwszy zadanie podporząd-

kowane za główne, upodobniono przez przypuszczenie koło z wielokątem foremnym i stąd przyszło do twierdzenia, iż podwajając nieskończenie liczby boków wielokątów wpisanego w koło i na niém opisanego, otrzyma się liczba najbliższa π, a nawet równa mu w tylu dziesiętnych, ile ich równych mają liczby wyrażające obwody lub powierzchnie wielokątów w stosunku do promienia $= 1$, których liczbę boków oznaczono ilością cyfr dziesiętnych na których poprzestać zamierzono. — Zrobiono tym sposobem z zagadnienia głównie geometrycznego, albo grę w liczby jak Piotr Metius; albo posuwając rozwinięcie formuły Ludolfa (wszystkie inne, co do istoty, w niczém się od niéj nie różnią) bezograniczenie, obdarzono to π liczbami potwornémi na dowód, iż niemasz innego spsobu obliczyć je nawet przez przybliżenie. Ale kulawiąc, że tak powiemy, ku *nieskończoności* (???) po schodach ułamku dziesiętnego niedającego się dokończyć, zapomniano na piękne: że w geometrji *equivalens*, nie jest to samo co *equalis*, jak się to używać zwykło w algebrze lub arytmetyce; że wielokąt równy powierzchnią z kołem, nie jest przeto kołem; jak n. p. kwadrat téjże saméj powierzchni z trójkątem, nie jest jednak trójkątem; że wielokąt mający obwód równy okręgowi koła, musi mieć koniecznie od niego powierzchnię mniejszą: i odwrotnie, równy mu w powierzchni, musi mieć obwód większy od jego okręgu; że podwajając ciągle liczbę boków wielokątów wpisanego i opisanego, podzielono nakoniec koło promienia $= 1$, na tyle wycinków równych między sobą, ile potrzeba było dać boków wielokątom, na których postanowiono zaprzestać; że przeto każdy trójkąt będący $\frac{1}{n}$ częścią ostatniego wielokąta opisanego i mający za podstawę 2styczne $\frac{1}{2n}$ okręgu koła, skąd 2styczne łuku $n' > 2$ łuki n' i $\frac{\text{pow. wielokąta}}{n} > \frac{\text{pow. koła}}{n}$, tak że wziąwszy tu za przykład wielokąt opisany o 24576 bokach, jeżeli przypuszczono, że obwód jego różni się od okręgu koła weń wpisanego w osméj dziesiętnéj, tém bardziéj przypuścić można, że bok jego, czyli $\frac{1}{24576}$

część obwodu, różni się przynajmniéj w dziewiątéj dziesiętnéj, od $\frac{1}{24576}$ okręgu koła, (żeby dowieść że tak nie jest, potrzeba formuły, za pomocą któréj, możnaby znaleść bok wielokąta opisanego o podwójnéj liczbie boków [przyp. (5)] bez pośrednictwa promienia wpisanego w wielokąt wpisany, a nadto mamy za sobą przykład ARCHIMEDESA, który bez wątpienia zatrzymał się na wielokącie o 96 bokach, nie dla tego, żeby nie umiał obliczyć wielokąta o bokach 192 i t. d., zwłaszcza że mu ułamek ciągły był znany); a stąd różnica obwodu $\frac{1}{24576}$ opisanego od $\frac{1}{24576}$ okręgu koła $=0,00000000x$ i różnica między całościami będzie $0,00000000x \times 24576$, zatém różnica ta musi wypaść koniecznie na piątą a nawet czwartą, nie zaś na dziesiętną gdzieś tam nieskończenie oddaloną. ARCHIMEDES miał więc racją umieścić swoje π pomiędzy $3+\frac{1}{7}$ i $3+\frac{10}{71}$, i nie zapuszczać się w ślizką drogę nieskończoności. Ale czemu się dziwić potrzeba, to że Akademia francuska wziąwszy zwyczajną metodę, ktora daje przybliżone $\pi = 3,1415926....$ za *non plus ultra* doskonałości, postanowiła (*in petto* wprawdzie), że zagadnienie kwadratury koła, które sama zaproponowała, i którego jak to bardzo dobrze zauważył P. LEGENDRE rozwiązanie, wymaga tylko *pierwszych nocji matematycznych*, (pozwolimy sobie dodać: ale trochę więcéj gruntownego i pomyślanego rozumowania), jest nierozwiązalne (4); i dała powód, iż tym, co (zasadzając się na naturze saméj umiejętności, i nie znajdując wyrozumowanéj przyczyny nierozwiązalności, w samém zadaniu), nie odstręczali się zmudną bo oporczywą pracą, usiłując znaleść to co jest rzeczywiste czyli prawdziwe, przypisano chorobę *monomanji*. Wszakże geometrya spór pomiędzy nami rozstrzygnie. Nietroszcząc się więc przy kim nadal zostanie przydomek *monomanów*, i mówiąc z KOPERNIKIEM: *quae ego scio non probat populus*, *quae probat ego nescio*, dodajemy jeszcze obliczenie π, to jest stałego czyli liczbowego stosunku okręgu koła do średnicy, biorąc promień $AC = 1$.

1) Trójkąty (fig. 4) BCf i Bhe (ob. II) podobne dają:

$he = \frac{Cf \times Bh}{CB}$; że zaś $Ch = 1,1180339....$ (ob. I. 1) a

$Cf = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70710678....$ (ob. V) więc $he = 0,08346262....$

2) Trójkąty podobne ACh i ehz′ (ob. I, II, III) dają:

$ez' = \frac{eh}{2} = 0,04173131....$ skąd $z'x' = 0,45826868....$ zaś trójkąty podobne ACh i z′Cx′ dają: $Cx' = 2z'x' = 0,91653737....$

3) W trójkącie eCx′ prostokątnym:

$$eC = \sqrt{Cx'^2 + ex'^2} = 1,044050166....$$

4) Przez punkt o′ w którym Ch″ (ob. VI) przecina okrąg dany prowadząc równoległą od ak i oznaczywszy literą z″ punkt jéj przecięcia się z CB, trójkąty podobne eCz′ i o′Cz″, dają:

$$o'z'' = \frac{ez' \times o'C}{eC} = 0,039970598....$$

5) Z punktu o′ spuściwszy o′y′ prostopadłą na CB, o′y′ jest wstawą kąta 2ψ (ob. VI); a trójkąty podobne ACh i o′y′z″ dają o′y′ albo $\text{wst.}\,2\psi = \frac{o'z'' \times AC}{Ch} = 0,03575079....$

6) Cy′ albo $\text{dost.}\ 2\psi = \sqrt{1 - o'y'^2} = 0,99936073....$

7) oy″ albo $\text{wst.}\ \psi = \frac{\sqrt{2(1 - Cy')}}{2} = 0,017878338....$

8) Cy″ albo $\text{dost.}\ \psi = \sqrt{\frac{1 + Cy'}{2}} = 0,99984016....$

9) Oznaczywszy literą z‴ punkt przecięcia się a′k′ z Ch, trójkąty podobne oy″z‴ i ACh dają:

$$Cz''' = (Cy'' - y''z''') = Cy'' - \frac{oy''}{2} = 0,99090099....$$

10) Zaś trójkąty podobne h′Ch i oCz‴ dają:

$$Ch' = \frac{Ch \times Co}{Cz'''} = 1,128300315 .... \quad (5)$$

11) Ztąd $Cd' = \frac{\overline{AC}^2}{Ch'} = 0,88628886007....$

12) Nakoniec (ob. 1, 2. VI):

$$(2\overline{Cd'})^2 = \overline{a'k'}^2 = \pi = 3,1420317739.... \quad (6)$$

Uwaga. Według obliczenia trygonometrycznego dla tém większéj pewności na prośbę naszą przez P. Rafaela Schönborn z największą jak tylko być może dokładnością, zgadzającego się zupełnie z wypadkiem wyżéj podanym, łuk $Ao = AB + \psi$ (ob. VI fig. 1) jest $= 27^\circ\ 35'\ 21'',\ 93...$ łuk zaś $\psi = 1^\circ\ 1'\ 27'',\ 74...$ Co jest niezaprzeczonym dowodem, że *konwencyonalny* podział koła, na którym zasadzają się hypotezy i formuły o których wyżéj, nie jest zdolny uczynić zadość wyrozumowanemu rozwiązaniu zadania tego nawet przez przybliżenie.

Przypiski.

1) Dowodzenia tego podstawą jest analityczne porównanie odcinka koła ABdA z aBDa odcinkiem $\overline{ak}^2$, które, gdyby ak było bokiem kwadratu szukanego, powinny być równe w powierzchni. Że zaś to porównanie, daje nam za wypadek otrzymany z całą abstrakcyjną ścisłością, różnicę pomiędzy temi powierzchniami, można wziąść miarę z tego co następuje: Trójkąty aCB = BCd jako mające też samą wysokość Cd i podstawy aB = Bd. Oznaczywszy dla skrócenia P i p odcinki o których wyżéj, mamy: wyc. ACB = BCd + P i BCD = BCd − p. Odjąwszy te zrównania od siebie otrzymujemy:

$$\text{wyc. } BCA - BCD = P + p.$$

Nadto w dalszym ciągu analizy znajdujemy wycinek powierzchni $\frac{\overline{AC}^2}{60}$, składający się z części stanowiących całość każdego z dwóch odcinków, i zamieniających się znowu na wycinki równe im w powierzchni; tak że w końcu dają na powierzchnią koła promienia AC, $\frac{188}{60}(\overline{AC}^2) + 4\delta$ wycinki.

Ale chociaż rozdzieliwszy koło na 188 wycinków (każdy powierzchni $\frac{\overline{AC}^2}{60}$) i 4δ wycinki, za pomocą formuły analitycznéj i wykreślenia, znajdujemy wyc. $4\delta > \frac{\overline{AC}^2}{2 \times 60}$ i na *minimum* powierzchni koła danego kwadrat powierzchni $\frac{188}{60} + \frac{1}{120}\overline{AC}^2$, jak równie wycinki równe P i p w powierzchni; że jednak tu nie idzie o zrównanie tych odcinków

biorąc średnią arytmetyczną między wycinkami téj saméj z nimi powierzchni, gdyż 2P + 2p nie będzie taż sama co 2P' + 2p' summa odcinków, odciętych nawzajem od $\frac{1}{4}$ koła i $\frac{1}{4}$ kwadratu równego mu w powierzchni, przeto, jak to być powinno, bok kwadratu równego powierzchni koła promienia AC, jedynie przez wykreślenie, ten zmysłowy wizerunek abstrakcji, znalezionym być może. Wszakże opuszczenie tego ustępu analizy, jakkolwiek przez się ciekawego, nie upoważnia zgoła do zarzutu, że z téj przyczyny, rozwiązanie zadania nie jest zupełne. Ani bowiem *maximum* Archimedesa, ani nasze *minimum* nie czynią zadość rozwiązaniu, mogą one tylko służyć jako pewny rodzaj *criterium* wykreślnéj i liczbowéj pewności rozwiązania. A ztąd Analiza, któréj ostatecznym wypadkiem, czyli dedukcją, powinien być bok kwadratu równego powierzchnią z kołem danêm, zgoła od nich nie zależy. Dla tego zaś opuszczając ten ustęp analizy w całéj jego obszerności, zastępujemy go powagą Archimedesa, że *maximum* jego $\frac{22}{7} = 3{,}1428571.. > 1427146$, (powierzchni wielokąta opisanego o 96 bokach, którego podwójna styczna łuku $1^{0}\ 52'\ 30''$ jest bokiem) acz liczebne i wynikłe *z konwencionalnego* podziału koła, daje się jednak udowodnić przez analizę i wykreślenie w granicach ściśle oznaczonych.

(2) Jeżeli, używamy w téj redakcji niektórych wyrażeń a nawet formuł trygonometrycznych, to jedynie dla *skrócenia*, i łatwo jest spostrzedz, że rozwiązanie zagadnienia tego może się bez tego obejść zupełnie, i nie wychodzi z granic pierwszéj części geometryi elementarnéj, któréj ono samo stanowi część uzupełniającą.

(3) Jeżeliby, co do téj najważniejszéj części naszéj analizy, podobało się komu uczynić zarzut, że równoległa od A'B' przez punkt przecięcia się drugich ramion kątów B = E = m z AC promieniem prowadzona, może być niekoniecznie DD', zatém że x''' i x'' nie są absolutnie indentyczne z f; na to znajdzie odpowiedź w saméj analizie. Jakoż kąty te mają EB ramie wspólne, a przypuszczając że ich ramionia BV' = EQ' nie prze-

cinają się w punkcie f, ale w innym f' mniéj lub więcéj oddalonym od środka C niż f, to jest żebyśmy mieli:

$$m = EBV' > EBV \text{ albolitéż } m = DBV' < EBV;$$

2 kąty m w punkcie f', wspólnem przecięciu sie linij $BV' = EQ'$, AC i linji równoległéj od EB przez punkt ten prowadzonéj, miałyby za miarę łuk $EV - (ED' \pm \varpi) + BD \pm \varpi$. Natenczas wziąwszy $B'''x''' = Ex'''$ mielibyśmy trójkąt $B'''x'''E$ równoramienny i kąt $EB'''x''' = m$ za kołem lub wewnątrz koła promienia AC. Ale w tym razie $BV' = EQ'$ niebyłyby już równoległe od $NT = MH$ równoległych od BV i EQ. Równoległe bowiem do BV' i EQ albo prowadzone przez punkta N i M odcięłyby łuki $ET' = BH' >< ET = BH$, albo prowadzone przez punkta T i H dałyby $BN' = EM' >< BN = EM = EB$. To nieodzowne następstwo przypuszczenia jak wyżéj, już *a priori* sprzeciwia się zasadzie, ktorąśmy przyjęli za *criterium* téj części analizy. Dla tego bowiem właśnie wzięliśmy punkta N i M na linii EB tak, żeby trójkąty $EGN \cong BOM$ dały kąty:

$$BNG = BEG = EBO = aBh = EMO,$$

i żeby sieczne NT i MH rozdzieliły kąty:

$$BNG = EMO = EBO \text{ na } MNT = HMN = m \text{ i } GNT = HMO = n.$$

Gdyby więc nam potrzeba było prowadzić TN' i HM' równoległe od BV' i EQ', wypadłyby ztąd kąty:

$$BN'G = E'MO >< EBO = BNG = EMO,$$

których jużbyśmy nie mogli rozdzielić na m i n, gdyż przypuszczając $BN'T = EM'H = m$ mielibyśmy $GN'T = HM'O >< n$. Zresztą obacz *zakończenie* w dodatku.

(4) Chociaż Voltaire owe bożyszcze filozoficzne XVIII wieku twierdzi: *Linstinct d' une bête vaut mieux que, la raison d' un homme*; przez naukę atoli i doświadczenie, korząc się przed świętością dogmatów wiary Ojców naszych, ponieważ znajdujemy tam mądrość najwyższą, przyśliśmy do przekonania, że *kropla rozumu lepsza jest* niż morze erudycji lub umiejętności, we filozofii mianowicie:

(5) Legendre (*Eléments de géométrie* onz. edit. p. 129) w wyraźnéj chęci udowodnienia że $\pi = 3{,}1415926....$ jest *non plus ultra*, ułożył formułę na zamianę, przez przybliżenie kwa-

dratu opisanego, na koło równéj z nim powierzchni. Wszakże ze ścisłego rozbioru tak saméj formuły, jak wyrachowania jego pokazuje się, że liczba którą on bierze za promień szukany w przybliżeniu, byłaby raczéj albo promieniem koła opisanego na wieloboku przybliżonym powierzchnią do kwadratu danego, albolitéż promieniem wpisanym w wielokąt większéj od niego powierzchni. Sprostowawszy zaś ten rachunek Legendra, wykonany za pomocą logarytmów, widać niedokładnych, znajdujemy na π liczbę 3,141594... co już dowodzi, że to przybliżenie nie jest, nawet jako takie, stanowcze, tak jak np: $\sqrt{2}=1,141421357$.... wyrażająca stosunek przekątnéj, do boku kwadratu wziętego za jedność. Liczba w mowie będąca, w przypuszczeniu że kąt jest nieskończenie podzielny (?), mogłaby tylko wyrażać stosunek przybliżony największego obwodu w koło wpisanego do średnicy, jak się to oczywiście okazuje z formuły Ludolfa, mianowicie uproszczonéj przez S. F. Lacroix. (Eléments de Géométrie 10eme édit. p. 108). A że powierzchnia wielokąta tego obwodu równa się prostokątowi wystawionemu na promieniu$=1$ i na połowie obwodu wielokąta wpisanego, mającego połowę liczby boków jego, a koło zawsze więcéj się różni od powierzchni wielokąta wpisanego, niż wielokąt opisany od koła, tak, że różnice te są w stosunku <2 i $>\frac{3}{2}$: oczywistą więc jest rzeczą, że liczba ta jest jeszcze mniejsza niż *minimum* π, którego *maximum* bardzo przybliżonego, nie można znaleść za pomocą téj formuły: albowiem potrzebaby mieć formułę na obrachowanie boku wielokąta opisanego o podwójnéj liczbie boków tak, żeby on nie był ilorazem z dzielenia boku wielokąta wpisanego, przez promień wpisany w ten ostatni, a podobnéj formuły niemamy. Wszakże, gdyby nam nawet formułę taką ukazano, prosilibyśmy nadto o ścisłą geometryczną demonstracyą, że kąt jest nieskończenie podzielny i to jeszcze w postępie malejącym $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$...

(6) Ilość kąta ψ, zależy bezpośrednio od ilości kątów m i n (ob. II, IV). Skoro więc udowodniliśmy (ob. V.) że kąty te nie mogą być inne, jedno te na które BV rozdziela EBC$=a$Bh, udowodniliśmy zarazem, że kąt ψ wykreślony pod VI czyni

2.

zadość rozwiązaniu zagadnienia. Żądać potém, żeby z obliczenia π wypadła koniecznie liczba 3,1415926... jako *criterium* pewności rozwiązania, byłoby absurdum. Zwłaszcza, *że wielobok foremny o nieskończonéj liczbie boków*, równie jak pokrewna mu *ratio irrationalis*, są same przez się *absurdum*, Wielokąt foremny, równie jak koło, wyrażają powierzchnie zupełnie ograniczone, zatém skończone zupełnie; a linij *absolutnie niewspółmiernych* nie zna geometrja teoretyczna. Przedmiotem téj teorji jest przeciwnie, ścisłe oznaczenie stosunków zachodzących między ciałami różnych kształtów, ale zawsze prostokreślnych lub kolistych; między powierzchniami od nich odosobnionemi, i linijami oderwanemi od tych ostatnich które ona mnoży, dzieli, wynosi do potęg i z nich wyciąga pierwiastki z największą w abstrakcji dokładnością, za pomocą koła i trójkąta prostokątnego. Co jest dostatecznym dowodem, że wszystkie linje (w abstrakcji) mają jednę i tęż samą cząstkę, od któréj zaczyna się rozwijać ich rozciągłość rozmaita, i że ta jednostka jest miarą wspólną dla nich wszystkich; one zaś same są zarazem *ilościami ciągłemi* i *krotnemi*. A jeżeli w praktyce (*in concreto* to jest *graficznie* i *liczebnie*) nie możemy każdego razu znaleść miary wspolnéj dla dwóch linij danych, to nie dla tego, żeby one były, że tak powiemy, z natury swojéj niewspółmierne; albowiem, czy to obie proste, czy jedna prosta a druga kolista, pierwiastek ich rozciągłości jest zawsze jeden i ten sam, a ten pierwiastek jest ich miarą wspólną; ale dla tego, że téj cząstki zchwytać nie możemy, dla niedokładności naszego wzroku, cyrkla a nadewszystko arytmetyki, która nie umié zawsze wyciągnąć pierwiastku zupełnego, z kwadratu mającego pierwiastek skończony w wykreśleniu; albo ze sześcianu; a do któréj musimy wrócić z każdą formułą matematyczną, skoro nam przychodzi *abstractum* zamienić na *concretum*. W tym względzie ułamki ciągłe wynalezione już w starożytności i powstałe z nich formuły w wyższéj matematyce są pięknym, pożytecznym utworem, tam gdzie w praktyczném zastósowaniu umiejętności musimy przez nieudolność naszą poprzestać na przybliżeniu. Ale geometrja teoretyczna, acz imieniem i przedmiotem swoim

przylgła do ziemi, żeby umysłowi człowieczemu służyć za przewodnika w poszukiwaniu rzeczywistości i prawdy, nie ma jednak potrzeby uciekać się do nich, gdyż jéj twierdzenia zacząwszy od axiomatu, są wypadkiem rozumowania, nie zaś rachunku. Nikt np. niemógłby zaręczyć za doskonałość szalki, przez najbieglejszego rzemieślnika - mechanika wykonanéj; nie przeto jednak geometrji teoretycznéj zbywa na formułach doskonałego podziału linji prostéj na dwie równe części. Stwórca (Hiob XXVIII 24, 25, 26.) doskonałość miary i liczby sobie samemu zachował, nieodmawiając bynajmniéj człowiekowi pojęcia ich jestestwa, chociaż je schwytać mu niepodobna. Słowem: *niewspółmierność absolutna*, *nieskończone w skończoném*, *ratio irrationalis*, są to (w obec dokładnéj definicji geometrji teoretycznéj, téj umiejętności któréj podmiotem wykładu jest sprawdzić affirmacją i zamienić ją na axioma *(theorème)*, która jedna z pomiędzy wszystkich teorij w sobie saméj zawiera swoje *criterium* pewności i przedstawia jedyny wzór rozumowanéj mowy, jeżeli jéj założeniem powinno być twierdzenie— prawda) wyrażenia bezlogiczne, *negacje* wymyślone na pokrycie nieudolności usiłowań, przez przyznanie wady temu, co wady téj nie jest zdolne. Tak więc opinja, że zagadnienie kwadratury koła jest nierozwiązalne, mając swój początek we fikcji, że dwie linje: okrąg koła i promień, są *absolutnie* niewspółmierne, nie jest ugruntowana, ani na własności samego zagadnienia, ani na własnościach powierzchni i linij stanowiących przedmiot jego, ani na naturze umiejętności któréj to zagadnienie jest częścią uzupełniającą. Massy liczb nagromadzonych na poparcie zasady samo przez się fałszywéj, rozpełzną się, jak owe kupy śniegów zimowym wiatrem natasowanych, skoro im promień prawdy dogrzeje.

Kończąc na tém, miło nam jest oświadczyć tu nasze podziękowanie p. Rafaelowi Schoenborn. który nietylko na prośbę naszą przełożył to dziełko na język niemiecki, ale nadto z dobrą chęcią miłośnikowi umiejętności przystałą, ofiarował nam swoją uczynność w sprawdzeniu rachunków i nieraz udzielił nam trafnych swych spostrzeżeń.

Dodatek.

I.

Trisekcja kąta.

Zadanie.

Podzielić kąt dany na trzy równe części.

Rozwiązanie.

Niech będzie (fig. 2.) kąt dany C, który mamy podzielić na trzy części równe.

1. Bierzemy naprzód CA=CB, punkt C za środek koła i zekreślamy łuk AB, który dzielimy na dwie części równe tak, że promień CI prostopadły do AB cięciwy przecina ją w punkcie m, i mamy Am=Bm.

2. Podzieliwszy CI na Ci=oi=oI, z punktu C, promieniem oi nakreślamy łuk A'B' i prowadzimy cięciwę A'B' || AB gdyż △ACB'∽ACB'.

3. Biorąc punkt o (ob. 2.) za środek koła, promieniem oI kreślimy łuk GF, styczny z łukiem AB w punkcie I, i na tymże GF bierzemy łuki Il=Ik=Ai tak, że ponieważ łuki Ik=A'B' (ob. 2.) tudzież Il=Ik, przeto cięciwa (lk=A'B') || AB tudzież ln=kn.

4. Przez punkta więc l i k prowadząc promienie Ca i Cb, przecinające AB w punktach d' i f, i łącząc a i b, mamy △lCK∽aCb i △lCk równoramienny, tudzież (ob. I.) kąt:

$$aCI = \frac{aCb}{2} \quad \text{i ab} \,||\, \text{lk} \,||\, \text{AB}.$$

5. Złączywszy punkta l i o, ponieważ: kąty lon = A'Ci = BCl przeto lo || BC i kąt Clo = BCa = bCA. Robiąc zaś kąt aCM = ACB, prowadząc aM przecinającą Cb w punkcie e' tudzież CA w punkcie h, i łącząc b i M, w △abM kąt $aMb = \frac{aCb}{2} = aCl$ (ob. 4.), kąty zaś baM = bCA = Clo (ob. wyżéj) zatém △Clo ∽ aMb dają, lo : ab = Co : bM zkąd

$$ab = \frac{bM}{2}$$ (ob. 2.) i kąt aCb < (BCa = bCA).

6. Ale ponieważ △AhM ≅ Bd'a dają hM = Bd' przeto △Bd'C ≅ hMC dają kąty ChM = Bd'C, tudzież kąty e'hC = fd'c = baC = d'fC (ob. 3. 4.). Ponieważ w △e'Ch kąt e'Ch (ten sam co) bCA > aCb (ob. 5.) przeto kąt he'C < e'hC, a ztąd Ch < Ce', że zaś Ch = Cd' = Cf (ob. 3. 4 i wyżéj) przeto punkt e' na linji bC znajduje się między punktami b i f (ob. 5.).

7. Przez punkta zatém M i f prowadząc linją, przedłużoną aż do spotkania łuku AB w punkcie D, ta odetnie łuk DM > AB; biorąc zaś łuk DN = AB i łącząc D z N, cięciwa DN przecina AC w punkcie p, zaś AB w punkcie e, i ponieważ DN = AB przeto De = eA.

8. Przez punkt D prowadzimy cięciwę DE || AB, a łącząc punkta D i A mamy kąty ADE = BAD, zatém łuki AE = BD, cięciwy AE = BD tudzież kąty BAE = ABD.

9. Na AB bierzemy Bd = Ae = De (ob. 7.), i łącząc punkta E i e tudzież D i d mamy △EAe ≅ DBd (ob. 8.), skąd Dd = Ee i kąty BdD = AeE = DEe = EDd (ob. 8.); zatém poprowadziwszy Ed, △DEd ≅ eDE dają: Ed = De = Ae = Bd (ob. 7 i wyżéj).

10. Ale △Ded ≅ Aep (ob. 1. 7.) dają: Ap = Dd = Ee (ob. 9.), tudzież ep = ed; skąd Ae + de = De + ep, zatém (ob. 7. 9.) Np = Bd. Połączywszy więc punkta d, i e z punktem C, △NCp ≅ BCd dają Cd = Cp, zkąd znowu △dCe ≅ eCp (ob. wyżéj) dają kąty dCe = eCp, edC = epC i deC = peC.

11. Nadto, ponieważ (ob. 9.) Bd = Ae, zatém (obacz 1.) dm = em, trójkąt więc dCe jest równoramienny (obacz 1.);

I przeto takiż jest i $\triangle$eCp (ob. 10.); skąd Cp=Ce=Cd; a więc (ob. 10.) Cp+Ap=Ce+Ee=Cd+Dd; że zaś Cp+Ap jest promieniem, przeto (Cd+Dd=CD)=(Ce+Ee=CE) są także promieniami; inaczéj puntka D i E nieznajdowałyby się na okręgu którego AC promieniem a łuk AB częścią.

12. A ztąd kąt DCE jest identyczny z kątem dCe jak równie ECA z eCp, zatém (ob. 10.) DCE=ECA, a że (ob. 8.) ECA=DCB, przeto nakoniec kąty DCE=DCB=ECA.

Uwaga. Formuła więc geometryczna na podział kąta na trzy części równe, redukuje się do wykreślenia pod 1. 2. 3. 7 i 8.

Dla demonstracji, musieliśmy do tego wykreślenia pomiędzy innemi wprowadzić cięciwę aM (ob. 5.), która przecina się z równą sobie DN dając łuki MN=aD, zatém przecięcie to jest w środku kąta DCM wewnątrz odcinka MDN, zkąd punkt e (ob. 7.) na linji AB, znajduje się między punktem *f* i punktem przecięcia się AB i aM. Że zaś te trzy punkta a mianowicie ostatni i e (zwłaszcza jeżeli kąt dany do podzielenia jest bardzo mały) są tak bliskie siebie, że ich rozróżnić trudno, przeto lepiéj jest wziąść tylko łuk aM=AB, przez punkta M i *f* prowadzić DM, i odciąwszy łuk DN=AB, prowadzić samą cięciwę DN, zaś aM może być tylko wyobrażona, a tak i demonstracji zadość się stanie, i przecięcie się DN i AB będzie wyraźniejsze.

II.

Równoległe bez postulatum.

Zadanie.

Przez punkt dany poprowadzić równoległą od linji danéj.

Rozwiązanie.

Niech będzie (fig. 3.) punkt A dany, przez który mamy prowadzić równoległą od linji danéj XZ.

a) Na linji XZ bierzemy jakikolwiek punkt C, który łączymy z punktem A. I z tegoż punktu A jako środka, promieniem AC przecinamy linią XZ, tudzież punkt tego przecięcia K łącząc z A, mamy trójkąt ACK równoramienny. Wziąwszy znowu punkt A za środek a CK za promień, nakreślamy łuk i przecinamy go łukiem promienia AC ze środka C.

b) Łącząc M punkt przecięcia się tych łuków z A i C, mamy drugi trójkąt równoramienny ACM mający AC bok wspólny z trójkątem ACK (ob. *a.*) i do niego przystający, albowiem z wykreślenia AM = CK i AK = AC = CM.

Jeżeli znowu na téjże saméj linji XZ weźmiemy CN = CK i połączymy punkta N i M, dopełnimy trzeciego trójkąta MCN, mającego z trójkątem ACK (ob. *a.*) podstawy równe na téjże saméj linji XZ, którym punkt C jest wspólny, dzieli KN na dwie części równe, a nadto boki CM = AK.

Przedłużając więc AM nieograniczenie bierzemy na niéj AZ′ = AM i łączymy punkta Z′ i K, skąd czwarty trójkąt AKZ′, mający z trójkątem MCN boki AK = CM i AZ′ = CN.

c) Ale, ponieważ kąty KCM=KAM jako składające się z części równych wynikających z przystania do siebie trójkątów równoramiennych ACK i ACM (ob. *a.* i *b.*), więc kąty MCN=KAZ', i trójkąty MCN≌AKZ jako mające po dwa boki odpowiednie równe, zawierające między sobą dwa kąty równe, a ztąd KZ'=MN.

Nadto, ponieważ zrobiliśmy przez wykreślenie CK=AM, CN=CK, AZ'=AM, zatém KN=Z'M; to jest, taż sama jest odległość między punktami Z' i M wziętemi na linji Z'X', co i między punktami K i N na linji XZ wziętemi. Ponieważ zaś KZ'=MN, czyli ponieważ także taż sama jest odległość między punktem K wziętym na XZ a punktem Z' wziętym na X'Z', co między M wziętym na téj ostatniéj i N wziętym na tamtéj:—

Zatém wszystkie punkta linji Z'M są równie oddalone od wszystkich punktów *symetrycznie* im przeciwległych na linji KN.

W przeciwnym bowiem razie potrzebaby mieć albo:

KN><Z'M albo KZ'><MN,

co znowu jest wbrew przeciwném wypadkowi tak ze saméj konstrukcji, jak z najścisléjszéj demonstracji.

d) Nadto, kąty Z'KC+Z'KX jako przyległe czynią dwa kąty proste; kąty AMN+NMX' czynią także dwa kąty proste, a kąty Z'KC=AMN (ob. *a*, *b*, *c.*) jako składające się z części równych, skąd znowu kąty Z'KX=NMX'.

Jeżeli więc na linji danéj XZ weźmiemy KX=MY wziętéj na linji Z'X', mamy trójkąty Z'KX≌NMY (ob. *c.*), przeto boki Z'X=NY, zatém punkta Z' i Y wzięte na linji Z'X' równie oddalone od punktów wziętych symetrycznie względem tamtych na linji XZ to jest X i N.

Tymże samym sposobem ciągnąc demonstracją (aż do nieskończoności), to jest ciągle przedłużając XZ i X'Z', znajdziemy zawsze, że wszystkie punkta piérwszéj, symetrycznie przeciwległe wszystkim punktom drugiéj są od siebie równie oddalone, że przeto te dwie linje nigdy się ze sobą spotkać nie mogą; zatém Z'X' przez punkt dany A poprowadzona, jest równoległa od linji danéj XZ.

Oczewistą więc jest rzeczą, że to co nazywamy *postulatum* równoległych, niewchodzi zgoła ani do konstrukcyi czyli wykreślenia ani do demonstracji, że to wykreślenie czyni zadość rozwiązaniu zadania. I owszem jest ono raczéj ich wnioskiem.

Wniosek. Ponieważ żeby poprowadzić linją prostą w kierunku danym, dość jest mieć dwa punkta tego kierunku, przeto wykreślenia pod *a* i *b* czynią zadość rozwiązaniu zadania, i nadto dają formułę jedyną na rozwiązanie go wtenczas, kiedyby punkt dany był bardzo bliski linji danéj.

Uwaga. Dla uzupełnienia pojęcia równoległych poprawiamy zwykłą ich definicyą: Są to dwie linje proste na téj saméj płaszczyznie położone, mające wszystkie punkta *symetrycznie przeciwległe* równo oddalone od siebie, tak że w *każdą stronę* przedłużone, nigdy się ze sobą niespotkają.

III.

Zakończenie.

Ktoby chciał wykreślić kwadrat przybliżony do liczby 3,1415926...... biorąc $AC=1$, (ob. Kwadratura koła *wniosek* i *przydatek*), musiałby wziąść kąt $m' < \frac{1}{4}$ prostego. I natenczas mieć będzie kąt $m' < m$, siecz. $ACB + \psi' > Ch'$, dost. $ACB + \psi' < Cd'$.

Ale, powtarzamy, zawsze kwadrat ten będzie o wiele mniejszy od kwadratu równego powiérzchni koła promienia $AC=1$.

Albowiem, jakiéjkolwiek ilości byłby promień Cx koła równego w powiérzchni kwadratowi ze średnicy $A'B' = 2AC$ (ob. Kwadr. koła. *Wniosek* fig. 1) naznaczywszy okrąg jego literą Y, zawsze będziemy mieli:

$$2.\ \overline{(AC)}^2 = Y \times \frac{Cx}{4},\ \text{przeto}\ Y : \sqrt{2\overline{AC}^2} :: \sqrt{2\overline{AC}^2} : \frac{Cx}{4},$$

stąd zaś $$Y \# \frac{Y}{DD'} = \frac{4DD'}{Cx},\ \text{następnie}\ Y = \frac{4\overline{DD'}^2}{Cx} = \frac{8}{Cx}.$$

W tym zaś razie, gdyby koło promienia Ch' było mniejsze powiérzchnią od $\overline{A'B'}^2$, zatém $\pi \times Cx > \pi \times Ch'$, tedy nie można go powiększyć, nie powiększywszy jego okręgu, a przeciwnie, powiększając dla tegoż samego jego promień, to jest biorąc $Cx > Ch'$ będziemy mieli: $\frac{4\overline{DD}^2}{Cx} < \frac{4\overline{DD'}^2}{Ch'}$, wyraźne *absurdum*, to jest okrąg koła promienia większego mniejszy,

niż okrąg promienia mniejszego. Zatém nie może być $Cx > Ch'$, że zaś nie może być mniejsze dowodzić niepotrzebujemy, albowiem biorąc $AC=1$, mamy:

$$\frac{4\overline{DD'}^2}{Ch'} = 4\overline{DD'}^2 \times Cd' = 2\overline{DD'}^2 \times 2Cd' = 4a'k' = \pi \times Ch',$$

i przeto mielibyśmy $\pi \times Cx > \pi \times Ch'$ wtenczas właśnie kiedy $Cx < Ch'$.

Mamy w tém nadto ścisły geometryczny dowód na wszystko, cośmy powiedzieli w *przydatku* i *przypiskach* (5) i (6) do kwadratury koła. Gdyby bowiem *nieskończona podzielność* kąta była prawdopodobną, promień koła przybliżonego powierzchnią do kwadratu ze średnicy $=2$, to jest 1,1283508..... byłby wypadł P. Legendre (Elém. de Géom. onz. edit. p. 127—129) na wielokąty o 8192, nie zaś o 256 bokach, a porównywając tę formułę, tęż samą z tą podług któréj ułożona tablica na karcie 126, pokazuje się widocznie, że obie służą, w najdalszéj swéj konsekwencji, li-tylko do zbliżenia do siebie dwóch liczb różnych danych; zwłaszcza że w nich idzie mianowicie, o zbliżenie do siebie promienia $=1$ i dostawy <1, tudzież promienia >1 z dostawą >1. Bo téż liczby w geometrji teoretycznéj nic niedowodzą, i o tyle dają *concretum* rzetelne nawet *w przybliżeniu*, o ile formuła na *abstractum* jest *prawdziwą*.

Sam zaś Legendre (note III p. 287) najlepiéj dowodzi, że w tak zachwalonych przezeń metodach przybliżenia, więcéj idzie o postępne zrównywanie cyfer dziesiętnych dwóch liczb danych, za pomocą własności ułamków ciągłych, niż o obliczenie stałego stósunku okręgu koła do średnicy.

Prowizor Drukarni *Tomasz Szczurkowski.*

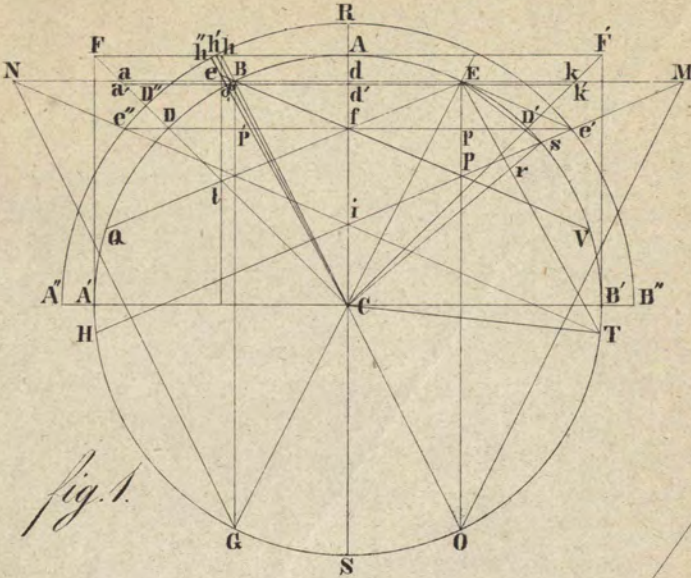


fig.1.

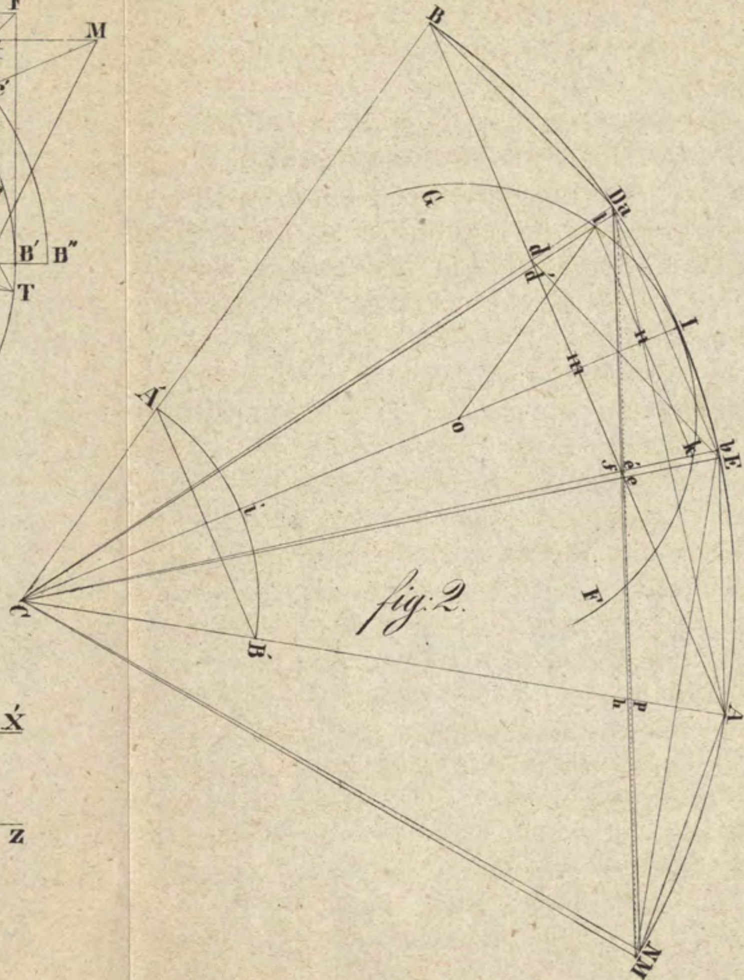


fig:2.

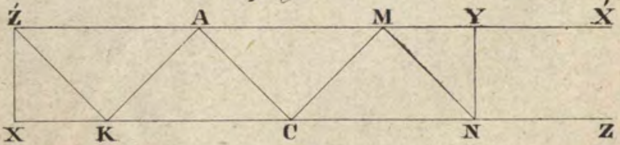


fig:3.

